029 901

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Dans tout le problème x désignera une variable réelle. Un polynôme réel définit une fonction qui sera encore appelée polynôme.

On notera N l'ensemble des entiers positifs ou nuls et N* l'ensemble des entiers strictement positifs.

PRÉAMBULE

Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels. On suppose qu'il existe un réel T, non nul, tel que pour tout x :

$$P(x + T) = P(x)$$

Montrer que $P(x)$ se réduit à une constante a_0.

On pose pour tout x :

(1) $\quad P_0(x) = 1$

(2) $\quad P_1(x) = x - \frac{1}{2}$

(3) $\quad P_n(x+1) - P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad n \in N^* \setminus \{1\}$

I. CONSTRUCTION D'UNE SUITE UNIQUE DE POLYNÔMES $P_n(x)$.

Montrer que si l'on impose la condition supplémentaire :

(4) $\quad \int_0^1 P_n(x)\,dx = 0 \qquad (n \in N^*)$

on définit ainsi une suite unique de polynômes.

II. EQUATION DIFFÉRENTIELLE VÉRIFIÉE PAR LES POLYNÔMES $P_n(x)$.

Si $P'_n(x)$ désigne la dérivée par rapport à la variable x du polynôme $P_n(x)$ établir les relations :

(5) $\quad P'_n(x) = P_{n-1}(x) \qquad n \in N^*$

(6) $\quad P_n(1) = P_n(0) \qquad n \in N^*/\{1\}$

Calculer $P_2(x)$ et $P_3(x)$. En déduire que $P_n(x)$ est de degré n et à coefficients rationnels.

III. ÉTUDE DE LA PARITÉ DES POLYNÔMES $P_n(x)$.

Après avoir établi la relation :

(7) $\quad P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$

montrer que $P_{2n}(x)$ est une fonction paire de $x - \frac{1}{2}$ et que $P_{2n+1}(x)$ est une fonction impaire de $x - \frac{1}{2}$. En déduire les symétries du graphe de $P_n(x)$ dans l'intervalle [0,1].

IV. ÉTUDE DE $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

On pose pour tout x :

(8) $\quad B_0 = 1$

(9) $\quad B_n = n!\, P_n(0) \qquad n \in N^*$

(10) $\quad Q_n(x) = P_n(x) + P_n\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{P_n(2x)}{2^{n-1}} \qquad n \in N^*$

En comparant les polynômes $Q_n(x)$ et $Q_n\left(x + \frac{1}{2}\right)$ établir l'expression de $Q_n(x)$.

En déduire l'expression de $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$ en fonction de n et B_n.

V. FONCTIONS GÉNÉRATRICES DES POLYNÔMES $P_n(x)$ ET DES NOMBRES B_n.

Soit α un nombre réel ($|\alpha| < 2\pi$) et $x \in [0,1]$.

.../...

ENSI DE CHIMIE 1980 (Centre P' TB II)

- 107 -

On admettra que, dans ces conditions, la suite de fonctions :

$$(11) \qquad S_m(\alpha, x) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \alpha^n P_n(x) \qquad (m \in \mathbb{N}^*)$$

est convergente, ainsi que les suites dérivée et intégrée (sur [0,1]) terme à terme par rapport à la variable x. On désigne par $S(\alpha, x)$ la limite de la suite $S_m(\alpha, x)$:

$$(12) \qquad S(\alpha, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n P_n(x)$$

1° Après avoir établi l'équation différentielle satisfaite par $S(\alpha, x)$, montrer que :

$$(13) \qquad S(\alpha, x) = K(\alpha)\, e^{\alpha x}$$

où $K(\alpha)$ est une constante ne dépendant que de α.

Déterminer $K(\alpha)$, puis l'expression de $S(\alpha, x)$.

2° Calculer la somme :

$$(14) \qquad T(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\, \alpha^{2n}$$

3° Montrer comment les sommes $S(\alpha, x)$ et $T(\alpha)$ permettent de générer les polynômes $P_n(x)$ et les nombres B_n.

Retrouver les expressions de $P_2(x)$ et $P_3(x)$ et donner les valeurs numériques de B_2 et B_4.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail